Nama : arip hidayattuloh

Nim : 312010244

Kelas : TI.20.B.1

Soal Nomor 1   
terlihatZ12={0,1,2,⋯,11} merupakan ring terhadap penjumlahan dan persamaan mod 12. Subring darinya yang memiliki kesatuan adalah⋯⋅( kesatuan adalah identitas/unsur kesatuan terhadap persamaan)  
A.{0}  
B. {0,4,8}  
C. {0,3,6,9}  
D. {0,1,2,⋯,11}  
E. semua alternatif jawaban benar

pembahasan

Dengan bantuan Tabel Cayley, kita dapat menunjukkan bahwa semua himpunan dengan dua operasi yang dimaksud merupakan subring dari Z12.

Untuk pilihan A, unity -nya adalah0 karena 0×120=0.

Untuk pilihan B, unity -nya adalah4 karena  
0×124=4×120=0  
4×124=16 mod 12=4  
8×124=32 mod 12=8.

Untuk pilihan C, unity -nya adalah9 karena  
0×129=0  
3×129=27 mod 12=3  
6×129=54 mod 12=6  
9×129=81 mod 12=9.

Untuk pilihan D, unity -nya adalah1 karena  
0×121=0  
1×121=1  
⋮    ⋮    ⋮    ⋮  
11×121=11.

Catatan: Karena pada operasi kali modulo 7berlaku sifat komutatif, maka pembahasannya tidak ditulis bentuk komutatifnya lagi.  
Jadi, semua alternatif pilihan jawaban A sampai D merupakan contoh subring dariZ12yang masing-masing memiliki kesatuan. Dengan demikian, pilih jawaban E .

Soal Nomor 2   
Jikasebuah adalah elemen suatu ring dengan sebuah≠0 dan terdapat unsur B dari ring itu dengan B≠0 begitu sehingga sebuahB=Bsebuah=0, maka sebuahdisebut pembagi nol sejati .  
DiberikanZ8={0,1,2,⋯,7} suatu ring terhadap penjumlahan dan persamaan mod 8. Semua elemen pembagi nol sejati dari  Z8 adalah ⋯⋅  
SEBUAH

A. {2}  
B. {2,4}  
C. {2,4,6}  
D. {0}  
E. {0,1,2,⋯,7}

pembahasan

Jelas alternatif pilihan D dan E jawabannya karena elemen pembagi nol sejati tidak memuat banyak0 (sesuai definisinya).

2 adalah pembagi nol sejati karena ada 4∈Z8 seperti itu berlaku 2×84=4×82=0.

4 adalah pembagi nol sejati karena ada 2∈Z8 seperti itu berlaku 4×82=2×84=0.

6 adalah pembagi nol sejati karena ada 4∈Z8 seperti itu berlaku 6×84=4×86=24 mod 8=0.

Jadi, semua elemen pembagi nol sejati dari Z8 adalah {2,4,6}.  
(Jawaban C)

Soal Nomor 3  
MisalkanRsuatu gelanggang. misalkansebuah∈G, sebuah disebut pembagi nol jika sebuah≠0 dan ada B≠0 begitu sehingga sebuahB=0. Banyaknya pembagi nol diZ121 adalah ⋯⋅  
SEBUAH.

A. 1                      C. 10                  E. 25  
B. 5                      D. 15

pembahasan

di belakang G={0,1,2,3,⋯,120}.  
Umumnya, kita memeriksa pembagi nolnya dengan menggunakan Tabel Cayley, tetapi untuk kasus ini, kita tidak mungkin menggunakan tabel karena akan sangat panjang dan kompleks.  
Kita harus mencari nilaisebuah,B∈Z121-{0} seperti itu berlaku (sebuah×B) mod 121=0. Tentulah dari sini kita tahu bahwasebuah×B harus merupakan kelipatan 121. Perhatikan bahwa  
1×121=11×11  
2×121=22×11  
3×121=33×11  
⋮    ⋮   ⋮    ⋮  
10×121=110×11  
dan kombinasi lain yang hasilnya merupakan kelipatan 121 juga melibatkan bilangan berkelipatan 11 seperti di atas sehingga pembagi nol dari G adalah {11,22,33,44, 55,66,77,88,99,110}.  
Jadi, banyak pembagi nol dari G adalah 10.  
(Jawaban C)

Soal Nomor 4   
DimisalkanZadalah himpunan semua bilangan bulat. Operasi\* dan ∘ dalam Z didefinisikan oleh sebuah\*B=sebuah+B+2 dan sebuah∘B=sebuah+sebuahB+B, untuk ∀sebuah,B∈Z. Didapat bahwaZ terhadap operasi \* dan ∘ bukan merupakan cincin karena ⋯⋅

tidak memenuhi sifat asosiatif terhadap \*

tidak memenuhi sifat asosiatif terhadap ∘

tidak terdapat elemen identitas terhadap \*

tidak terdapat elemen identitas terhadap ∘

semua alternatif jawaban salah

pembahasan

Akan ditunjukkan apakah berlaku (sebuah\*B)\*C=sebuah\*(B\*C) untuk ∀sebuah,B,C∈Z.  
(sebuah\*B)\*C=(sebuah+B+2)\*C=(sebuah+B+2)+C+2=sebuah+(B+C+2)+2=sebuah\*(B+C+2)=sebuah\*(B\*C)  
Jadi, sifat asosiatif terpenuhi oleh operasi \*.  
Akan ditunjukkan apakah berlaku(sebuah∘B)∘C=sebuah∘(B∘C) untuk ∀sebuah,B,C∈Z.  
(sebuah∘B)∘C=(sebuah+sebuahB+B)∘C=(sebuah+sebuahB+B)+(sebuah+sebuahB+B)C+C=sebuah+sebuah(B+BC+C)+(B+BC+C)=sebuah∘(B+BC+C)=sebuah∘(B∘C)Jadi, sifat asosiatif terpenuhi oleh operasi ∘.  
Akan ditunjukkan apakah ada elemen identitas terhadap\*.  
misalkansebuah,B∈Z, maka  
sebuah\*B=sebuahsebuah+B+2=sebuahB=-2Karena B=-2∈Z, maka B adalah identitas terhadap operasi \*.  
Akan ditunjukkan apakah ada elemen identitas terhadap∘.  
misalkan sebuah,B∈Z.  
sebuah∘B=sebuahsebuah+sebuahB+B=sebuahsebuahB+B=0(sebuah+1)B=0B=0Karena B=0∈Z, maka B adalah identitas dari operasi ∘.  
Dari keempat pilihan, tidak ada yang benar-benar ada. Jadi, alternatif jawabannya adalah E .

Soal Nomor 5  
Banyaknya unit di ringZ2n adalah ⋯⋅

A. 12(2n)=2n-1

B. 13(13)=2n-2

C. 14(14)=2n-2

D. 15(15)=2n-1

E. 16(16)=2n-2

pembahasan

Suatu elemen sebuah∈R (R ring) disebut unit di R jika ada B∈R seperti itu berlaku sebuah⨂B=1. Terkhusus untukZn, unit-unitnya adalah elemen yang relatif prima dengan n. Berarti, untukZ2n, unitnya adalah elemen yang relatif prima dengan 2n. Karena2n=2×2×⋯×2⏟n, yang berarti 2n tidak memuat banyak faktor lain selain 2, maka seluruh bilangan ganjil relatif positif dengannya sehingga banyak unit di ring  Z2n adalah 12(2n)=2n-1.

Jawabanya A

Soal Nomor 6  
Jikax tidak diragukan lagi Z[2]={sebuah+B2 | sebuah,B∈Z} yang memenuhi (17+122)x=1, maka nilai x adalah ⋯⋅

1. 13-444
2. 17-122
3. 16-122
4. 40-122
5. 45-122

pembahasan

Diberikan Z[2]={sebuah+B2|sebuah,B∈Z}.  
Perhatikan bahwa  
(17+122)x=1x=117+122x=17-122.Kita dapatkan bahwa x mengikuti sifat keanggotaan Z[2] untuk sebuah=17 dan B=-12. Jadi, nilai x yang dimaksud adalah 17-122

Jawabannya B

Soal Nomor 7

DidefinisikanQ[2]={sebuah+B2 | sebuah,B∈Q}. Buktikan bahwa himpunan tersebut merupakan subring (ring bagian) dariR dengan operasi penjumlahan dan perkalian standar.

1. Merupakan subring dari R
2. Bukan merupakan subring R
3. Merupakan subring S
4. Bukan merupakan subring s
5. Jawaban diatas salah semua

pembahasan

Untuk membuktikannya, kita akan menggunakan teorema berikut.  
misalkanR cincin, S⊆R dengan S≠∅, S dikatakan subring dari R jhj ∀sebuah,B∈S, berlaku sebuah-B∈S dan sebuahB∈S.

Karena Q himpunan tak kosong, maka Q[2]juga himpunan tak kosong. misalkansebuah,B,C,D∈Q, berarti sebuah+B2,C+D2∈Q[2].  
Operasikan pada elemen Q[2] sebagai berikut.  
(sebuah+B2)(C+D2)=(sebuahC+2BD)+(sebuahD+BD)2Karena sebuahC+2BD dan sebuahD+BD bilangan rasional (karena sifat ketertutupannya), maka (sebuahC+2BD)+(sebuahD+BD)2 mengikuti sifat keanggotaan Q[2].  
Selanjutnya, operasi pengurangan pada elemenQ[2] sebagai berikut.  
(sebuah+B2)-(C+D2)=(sebuah-C)+(B-D)2Karena sebuah-C dan B-D bilangan rasional (karena sifat ketertutupannya), maka (sebuah-C)+(B-D)2 mengikuti sifat keanggotaan Q[2].  
Dengan demikian, terbukti bahwaQ[2] merupakan subring dari R.

Jawabannya A

Soal Nomor 8  
Buktikan bahwa sembarang lapangan ( field ) pasti merupakan daerah integral

1. Tidak terbukti
2. Terbukti
3. Jawaban A dan B di atas salah
4. Jawaban A dan B di atas benar

pembahasan

misalkan R adalah sembarang lapangan, yang berarti R tanpa 0terhadap operasi keduanya membentuk grup abelian. Ambilsebuah,B∈R-{0}. AndaikansebuahB=0, maka jelas syarat grup abelian pada operasi kedua di Rtidak terpenuhi karena tidak memenuhi sifat tertutup. Dengan demikian, tidak adasebuah≠0,B≠0 jadi berlaku sebuahB=0. Jadi,Rmerupakan ring tanpa pembagi nol atau disebut sebagai daerah integral. (Terbukti) jawaban nya B

Soal Nomor 9  
MisalkanMn(Z) menyatakan himpunan matriks persegi berukuran n×n dengan elemen-elemennya pada Z. Jika operasi∙ menyatakan matriks dan M={M∈M2(Z):|M|≠0}, maka (M,∙) adalah ⋯⋅  
A. grup abelian  
B. grup non-abelian  
C. monoid abelian dan bukan grup  
D. monoid non-abelian dan bukan grup  
E. tidak dapat ditentukan

pembahasan

Jelas bahwa pada operasi perkalian maupun penjumlahan pada bilangan bulat bersifat tertutup. Sifat asosiatif juga berlaku secara umum pada matriks. matriks himpunanM juga memiliki identitas terhadap operasi matriks, yaitu [1001].Meskipun demikian, tidak semua anggota himpunan matriksnya memiliki invers yang juga anggota himpunan matriks tersebut.  
Dalam hal ini, kita sudah tahu matriks berordo2 dengan entri bilangan bulat sebuah,B,C,D yang dinotasikan [sebuahBCD]memiliki invers 1sebuahD-BC[D-B-Csebuah].  
Perkalian terhadap bilangan konstan berupa bilangan bulat (bilangan rasional) di luar matriks mengakibatkan entrinya tidak selalu bilangan bulat. Artinya, struktur aljabar(M,∙) memenuhi sifat tertutup, asosiatif, dan memiliki identitas, tetapi tidak semua anggotanya memiliki invers di M. Karena hanya memenuhi 3 aksioma pertama, maka struktur tersebut Mulus monoid (jika disebutoma invers terpenuhi, maka akan grup). Selanjutnya, operasi matriks tidak berlaku sifat komutatif. Jadi, struktur tersebut adalah monoid non-abelian (atau monoid non-komutatif) dan bukan grup.  
(Jawaban D)

Soal Nomor 10  
MisalkanSEBUAH={e,x,x2,x3,kamu,xkamu,x2kamu,x3kamu} dengan x4=kamu2=e dan xkamu=kamu-1x. Banyaknya tidak idempoten diSEBUAH adalah ⋯⋅  
SEBUAH.

1. 1
2. 3
3. 4
4. 5
5. 6

pembahasan

elemen sebuah∈SEBUAH disebut unsur idempoten di SEBUAH jika berlaku sebuah2=sebuah. Jelas bahwae adalah elemen idempoten dalam SEBUAH, karena berlaku e2=e.  
Perhatikan bahwax2sebuah=xsebuah hanya ketika xsebuah=e. Dengan kata lain, tidak ada perpangkatanxlain yang merupakan idempoten. Selain itu,kamu-1=kamu sehingga dalam grup ini, berlaku xkamu=kamux(abelian). Selanjutnya,  
(xsebuahkamu)(xsebuahkamu)=x2sebuahkamu2=x2sebuahe=x2sebuah≠xsebuahkamu.  
Jadi, tidak ada elemen SEBUAH dalam bentuk xsebuahkamuyang merupakan idempoten di grup tersebut.  
Dapat Kunci dari banyak idempoten diSEBUAH hanya ada 1, yaitu e.  
(Jawaban A)